Irreversibilität im Rahmen der Liouville-Gleichung

D. PFIRSCH und S. PRIESS

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 756—769 [1965]; eingegangen am 29. März 1965)

Im Rahmen des Vielzeitenverfahrens wird die LIOUVILLE-Gleichung für ein homogenes einatomiges Gas mit schwacher Wechselwirkung bis zur zweiten Ordnung im Wechselwirkungsparameter direkt, d. h. nicht im Rahmen der BBGKY-Hierarchie, gelöst. Die Lösungen gestatten eine gleichzeitige Diskussion der H-Funktionen, die mit der N-Teilchenfunktion bzw. mit der aus der N-Teilchenfunktion durch Integration resultierenden Einteilchenfunktion oder Master-Funktion gebildet sind. Das Resultat führt zur Deutung der Irreversibilität im Rahmen der LIOUVILLE-Gleichung als Phasenmischung zwischen den einzelnen Systemen der durch eine LIOUVILLE-Funktion beschriebenen virtuellen Gesamtheit bzw. auch zur Deutung mittels des PRIGOGINEschen Kaskadenmechanismus.

Die Überlegungen zum Verständnis des Wesens der Irreversibilität sind nach der grundlegenden Arbeit von BOGOLJUBOV [1] in jüngster Zeit vor allem durch die Arbeiten von PRIGOGINE [2] und seinen Mitarbeitern, sowie FRIEMAN [3], SANDRI [4] und MCCUNE [5] vorangetrieben worden. Die wesentliche Aussage dürfte durch PRIGOGINE gemacht worden sein, der das irreversible Verhalten etwa einer Einteilchenverteilungsfunktion als einen Kaskadenmechanismus erklärt, derart, daß Informationen, die ursprünglich in einer Einteilchenfunktion enthalten waren, zu immer höheren Korrelationsfunktionen wandern.

Die vorliegende Untersuchung dient in zweierlei Hinsicht einer weiteren Klärung des Problems der Irreversibilität: Einmal sollen im Rahmen der Zeitskalenmethode [3–5] mittels eines übersichtlichen Formalismus, der eine Zerlegung irgendwelcher N-Teilchen-Ausdrücke nach Korrelationen wie etwa nach Geschwindigkeitskorrelationen oder Ortskorrelationen oder gleichzeitig nach Geschwindigkeits- und Ortskorrelationen bewirkt, auf relativ einfachem Weg Lösungen der LIOUVILLE-Gleichung angegeben werden; sodann soll mit diesen N-Teilchenverteilungsfunktionen F_N das Problem der Irreversibilität an Hand der H-Funktionen für eine Einteilchenverteilungsfunktion, für eine Lösung der Master-Gleichung und für die Lösung der LIOUVILLE-Gleichung selbst untersucht werden, wobei vor allem die Relationen zwischen diesen H-Funktionen studiert werden. Die ganze Untersuchung erfolgt für den Fall der schwachen Wechselwirkung, also für kleine Änderungen der potentiellen Energie bei der Wechselwirkung zweier Teilchen verglichen mit deren mittlerer kinetischer Energie ihrer ungeordneten Bewegung und für eine Reichweite der Wechselwirkungskräfte, die nicht wesentlich größer ist als der mittlere Teilchenabstand. Es werden dabei räumlich homogene Systeme behandelt. Die Ergebnisse zeigen direkt den PRIGOGINEschen Kaskadenmechanismus auf, bzw. auch die Deutung der Irreversibilität im Rahmen der LIOUVILLE-Gleichung als Phasenmischung zwischen den unendlich vielen, sich jeweils etwas verschieden verhaltenden Systemen der durch F_N beschriebenen virtuellen Gesamtheit. Ein weiterer interessierender Punkt besteht darin, daß F_N auch für lange Zeiten nicht die Form $F_N(\{x_i, v_i\}, F_1(t))$ annimmt, wobei F_1 die Einteilchenverteilungsfunktion ist; BOGOLJUBOV nimmt bekanntlich für die s-Teilchenfunktionen mit $s \ll N$ an, daß sich deren Zeitabhängigkeit etwa nach der Zeit einer Stoßdauer über die der Einteilchenfunktion ergibt.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In einem ersten Abschnitt bringen wir die LIOUVILLE-Gleichung auf eine dem Fall der schwachen Wechselwirkung angepaßte dimensionslose Form. Dabei tritt ein kleiner Parameter ε auf, nach dem, wie in einem zweiten Abschnitt beschrieben wird, eine Entwicklung im Rahmen des Zeitskalenformalismus vorgenommen wird. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch die erwähnte Zerlegung

[1] N. N. BOGOLJUBOW, Studies in Statistical Mechanics, Vol. 1, Edited by J. Deboer u. G. E. Uhlenbeck, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1962.

[2] J. PRIGOGINE, Non-Equilibrium Statistical Mechanics, Interscience Publishers, New York—London 1962.

[3] E. FRIEMAN, J. Math. Phys. **4**, 410 [1963].

[4] G. SANDRI, Ann. Phys., N. Y. **24**, 332 [1963].

[5] J. E. MCCUNE, Bericht des Instituts für Plasmaphysik, Garching IPP-6/4 (August 1963); Phys. Fluids **7**, 1306 [1964].

nach Korrelationen, die ebenfalls in diesem Abschnitt gebracht wird. In einem dritten Abschnitt geben wir Lösungen der LIOUVILLE-Gleichung bis zur zweiten Ordnung in ε an, bei der wir einmal gleichzeitig Geschwindigkeits- und Ortskorrelationen und das andere Mal nur Ortskorrelationen abspalten. Im ersten Fall erhalten wir als kinetische Gleichung direkt die LANDAU-Gleichung, im zweiten Fall die Master-Gleichung von BROUT und PRIGOGINE [6]; dieser zweite Fall entspricht im wesentlichen der PRIGOGINEschen Graphenmethode, die Untersuchung erfolgt hier jedoch nicht im FOURIER-Raum. Im vierten Abschnitt werden die H-Funktionen diskutiert.

1. Die Liouville-Gleichung bei schwacher Wechselwirkung

Die LIOUVILLE-Gleichung für ein System aus N gleichen Teilchen der Masse m, deren Wechselwirkung durch ein Potential $V(x_i-x_j)$ mit $V(\infty)=0$ beschrieben wird, lautet [6a]

$$\frac{\partial F_N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N} v_i \frac{\partial F_N}{\partial x_i} - \frac{1}{m}\sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{\partial V(x_i-x_j)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_N}{\partial v_i}=0. \tag{1}$$

Führen wir dimensionslose Größen durch

$$\begin{aligned} V(x_i-x_j) &= V_0\, U(x_i'-x_j'),\\ x_i &= R\, x_i',\\ v_i &= v_t\, v_i',\\ t &= (R/v_t)\, t' \end{aligned} \tag{2}$$

ein, dann wird aus (1)

$$\frac{\partial F_N}{\partial t'}+\sum_{i=1}^{N} v_i' \frac{\partial F_N}{\partial x_i'} - \frac{V_0}{m\, v_t^2}\sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{\partial U(x_i'-x_j')}{\partial x_i'}\,\frac{\partial F_N}{\partial v_i'}=0. \tag{3}$$

Die Gleichung besitzt also einen dimensionslosen Parameter

$$V_0/(m\, v_t^2)=\varepsilon\,. \tag{4}$$

Wir treffen jetzt folgende Wahl der dimensionsbestimmenden Größen V_0, R und v_t:

1. $V_0=\mathrm{Max}\,|V|$, also $|U|\leqq 1$.

2. R = Reichweite der Wechselwirkungskräfte, also

$$U\approx 0 \quad \text{für} \quad |x_i'-x_j'|>1\,.$$

3. v_t^2 = quadratischer Mittelwert der Geschwindigkeit der ungeordneten Teilchenbewegung.

Die letzte Wahl erlaubt glatte Verteilungsfunktionen, für die

$$|\partial F_N/\partial v_i'|=O(F_N)$$

gilt. Diese Bedingung soll im folgenden immer erfüllt sein.

Für ein homogenes System, das wir allein betrachten wollen, stellen sich auf Grund der Wechselwirkung zwischen den Teilchen Korrelationen ein, deren Reichweite im wesentlichen auch durch R gegeben ist, so daß in diesem Fall $|\partial F_N/\partial x_i'|=O(F_N)$ möglich ist. Auch diese Bedingung soll im folgenden immer erfüllt sein. Ist weiter R höchstens von der Ordnung des mittleren Teilchenabstandes, so reduziert sich die Doppelsumme in (3) der Größenordnung nach auf eine einfache Summe. Damit stellt dann das in (4) definierte ε verglichen mit 1 gerade ein Maß für die Stärke der Wechselwirkung dar; d. h., der Fall schwacher Wechselwirkung ist durch $\varepsilon \ll 1$ gegeben. Für diesen Fall ist also (3) die angepaßte dimensionslose Form der LIOUVILLE-Gleichung.

Lassen wir die Striche bei den neuen Variablen wieder weg, so lautet diese Gleichung:

$$\frac{\partial F_N}{\partial t}+K\,F_N-\varepsilon\, I\, F_N=0; \tag{5}$$

darin bedeuten

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{N} v_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,,\\ I &= \sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{\partial U(x_{ij})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}\,, \quad x_{ij}=x_i-x_j\,. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Lösungsmethode

Zur Lösung der LIOUVILLE-Gleichung wird sinngemäß eine Methode von FRIEMAN [3] und SANDRI [4] zur Lösung der BBGKY-Gleichungen übertragen:

Die Verteilungsfunktion F_N wird in geeigneter Weise als $F_N(x_1,\ldots,x_N;\, v_1,\ldots,v_N;\, t,\varepsilon\, t,\ldots)$ dargestellt. Durch $\tau_\nu=\varepsilon^\nu\, t$, $\nu=0,\, 1,\ldots$, werden neue Variable τ_ν eingeführt, und indem man diese dann im Produktraum der $\tau_0,\, \tau_1,\ldots$ als voneinander unabhängig betrachtet, erhält man eine Fortsetzung von F_N auf diesen τ_ν-Raum. Diese Fortsetzung von

[6] R. BROUT u. J. PRIGOGINE, Physica **22**, 35 [1956].

[6a] Vektorielle Größen sind als solche nicht besonders gekennzeichnet.

F_N ist natürlich nicht eindeutig, und ihre Willkür liegt in der Wahl der Darstellung von F_N als $F_N(x_1, \ldots, x_N; v_1, \ldots, v_N; t, \varepsilon t, \ldots)$ begründet. Durch später folgende Bedingungen wird festgelegt, für was für eine Fortsetzung man sich interessiert. (Wir wollen die Fortsetzung von F_N der Einfachheit halber wieder mit F_N bezeichnen.) Die Zeitvariable t wird im τ_ν-Raum durch die Kurve $\tau_\nu = \varepsilon^\nu t$, $\nu = 0, \ldots$, dargestellt; daher entspricht der Ableitung $\partial/\partial t$ im τ_ν-Raum die Ableitung $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu (\partial/\partial\tau_\nu)$. Die Fortsetzung der LIOUVILLE-Gleichung (5) lautet also:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \frac{\partial F_N}{\partial \tau_\nu} + K F_N = \varepsilon I F_N . \tag{7}$$

Auf F_N wird Störungsrechnung nach ε angewendet:

$$F_N = F_N{}^0 + \varepsilon F_N{}^1 + \ldots . \tag{8}$$

Damit erhält man aus (7) bis zur 2. Ordnung in ε folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_0} + K F_N{}^0 = 0 , \tag{9}$$

$$\frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} + K F_N{}^1 = I F_N{}^0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} + K F_N{}^2 = I F_N{}^1. \tag{11}$$

Entsprechend der FRIEMAN–SANDRIschen Methode wird gefordert, daß die Fortsetzung von F_N so beschaffen sei, daß in den einzelnen $F_N{}^\nu$ möglichst keine säkularen Terme auftreten. Terme werden dabei säkular genannt, wenn sie positive Potenzen der τ_ν enthalten. FRIEMAN und SANDRI untersuchen die Hierarchie-Gleichungen. Sie fragen nach Lösungen, für welche die verschiedenen Approximationsstufen aller s-Teilchen-Funktionen von Säkularitäten möglichst frei sind. Damit stellen sie die Bedingung, daß sich Säkularitäten innerhalb einer jeden s-Teilchenkorrelation kompensieren sollten.

Wir werden zeigen, daß man eine jede von N Teilchen abhängende Funktion als eine Summe von gewissen Korrelationstermen darstellen kann. Es gibt viele Möglichkeiten solcher Darstellungen. Eine dieser Möglichkeiten entspricht der Aufspaltung der LIOUVILLE-Gleichung nach der BBGKY-Hierarchie, eine andere bedeutet für die N-Teilchen-Funktion ihre Zerlegung nach der BALESCU–PRIGOGINEschen Methode [2]. Jede dieser Darstellungen hat die Eigenschaft, daß sie mit der Addition verträglich und, nachdem die Art der Darstellung einmal festgelegt, auch eindeutig ist. Wir müssen deshalb fordern, daß sich Säkularitäten innerhalb eines jeden Korrelationssummanden kompensieren sollten. Da im Rahmen der schwachen Wechselwirkung der Fall verschwindender Relativgeschwindigkeiten nicht mehr richtig erfaßt wird, kann diese Forderung für solche Stellen der Korrelationsfunktionen im allgemeinen jedoch nicht gestellt werden. (Hinsichtlich damit zusammenhängender Probleme siehe [7, 8].)

3. Lösung bis zur 2. Ordnung

Es sollen zunächst zwei der eben in Abschnitt 2 erwähnten Darstellungen einer von N Teilchen abhängenden Funktion

$$A = A(x_1, \ldots, x_N; v_1, \ldots, v_N; t)$$

als Summe von Korrelationstermen hergeleitet werden. Im Fall 1) wird die Funktion nach Orts- und Geschwindigkeitskorrelationen bezogen auf eine frei wählbare Funktion $G_N = G_N(1, \ldots, N; t)$ [8a], im Fall 2) nur nach Ortskorrelationen zerlegt. Mit V sei das Volumen bezeichnet, über das im Ortsraum für ein Teilchen zu integrieren ist. Die Verteilungsfunktion F_N ist so normiert, daß

$$\frac{1}{V} \int d^3x_1 \int d^3v_1 \ldots \frac{1}{V} \int d^3x_N \int d^3v_N\, F_N = 1 \tag{12}$$

ist.

Wir werden folgende symbolische Abkürzungen verwenden:

$\int dx_\nu$ bzw. $\int dv_\nu$ für $\frac{1}{V}\int d^3x_\nu$ bzw. $\int d^3v_\nu$;

$\int d\nu$ für $\int dx_\nu \int dv_\nu$;

$\int dx^N$ bzw. $\int d^N$ für $\int dx_1 \ldots dx_N$ bzw. $\int d_1 \ldots dN$;

$\int dx^\mu$ bzw. $\int d^\mu$ für $\int dx_{i_1} \ldots dx_{i_\mu}$ bzw. $\int di_1 \ldots di_\mu$,

wobei $i_1, \ldots, i_\mu$ irgendein μ-Tupel der N-Teilchen sein kann;

$\int \frac{dx^N}{dx_{i_1} \ldots dx_{i_\mu}}$ bzw. $\int \frac{d^N}{di_1 \ldots di_\mu}$ für

$\int dx_{j_1} \ldots dx_{j_{N-\mu}}$ bzw. $\int d_{j_1} \ldots d_{j_{N-\mu}}$,

[7] C. H. SU, J. Math. Phys. 5, 1273 [1964].

[8] D. FRANK, D. PFIRSCH u. S. PRIESS, VI. Conf. Intern. sur les Phénomènes d'Ionisation dans les Gaz, Orsay/Frankreich, Tome I, 183 [1963].

[8a] Die Argumente $1, \ldots, N$ stehen abkürzend für $x_1, v_1, \ldots, x_N, v_N$.

wobei die $j_1, \ldots, j_{N-\mu}$ gerade die zu $i_1, \ldots, i_\mu$ disjunkte Menge in $1, \ldots, N$ bilden.

Die Darstellung der Funktion A lautet im Fall 1):

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \ldots + \langle A \rangle_N \tag{13}$$

mit $\langle A \rangle_0{}^0 = \int \mathrm{d}^N A\,, \ \langle A \rangle_0 = \langle A \rangle_0{}^0\, G_N\,,$

$$G_N = G_N(1, \ldots, N; t), \ \int \mathrm{d}^N G_N = 1, \tag{14}$$

$$\langle A \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = \int \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}\nu_1 \ldots \mathrm{d}\nu_i} (A - \langle A \rangle_0 - \ldots - \langle A \rangle_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

$$\langle A \rangle_i = \frac{1}{i!} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_i = 1}^{N}{}' \langle A \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} \int \mathrm{d}\nu_1 \ldots \mathrm{d}\nu_i\, G_N\,, \quad i = 0, \ldots, N, \tag{16}$$

($'$ bedeutet: alle $\nu_1, \ldots, \nu_i$ sollen voneinander verschieden sein);
für $i = 0$ sei $\langle A \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = \langle A \rangle_0{}^0$;
und im Fall 2) hat man für A die Darstellung:

$$A = [A]_0 + [A]_1 + \ldots + [A]_N \tag{17}$$

mit $\quad [A]_0{}^0 = \int \mathrm{d}x^N A, \quad [A]_0 = [A]_0{}^0, \quad (18)$

$$[A]_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = \int \frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}x_{\nu_1} \ldots \mathrm{d}x_{\nu_i}} (A - [A]_0 - \ldots - [A]_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{19}$$

$$[A]_i = \frac{1}{i!} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_i = 1}^{N}{}' [A]_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}, \quad i = 0, \ldots, N,$$

für $i = 0$ sei $\quad [A]_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = [A]_0{}^0. \quad (20)$

Auch hier könnte man allgemeiner die Korrelationssummanden analog zum Fall 1) mit einer Bezugsfunktion G_N definieren.

Da aber im Fall 2) nicht über Geschwindigkeiten integriert wird, braucht G_N nicht notwendig von den Geschwindigkeiten abzuhängen, und damit kann man insbesondere $G_N = 1$ wählen.

Wenn im folgenden eine Aussage gleichzeitig für beide Darstellungen gemacht werden soll, wollen wir statt $\langle A \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$, $\int \mathrm{d}x^i$ und $[A]_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$, $\int \mathrm{d}^i$ stets $\{A\}_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$, $\int \mathrm{d}^i$ schreiben.

Um die Beziehungen (13) und (17) einzusehen, hat man sich nur zu überlegen, daß

$$\{A\}_N{}^{i_1, \ldots, i_N} = A - \{A\}_0 - \ldots - \{A\}_{N-1} \tag{18}$$

und deshalb

$$\{A\}_N = \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \ldots, i_N = 1}^{N}{}' (A - \{A\}_0 - \ldots - \{A\}_{N-1})\,, \tag{19}$$

also

$$\{A\}_N = A - \{A\}_0 - \ldots - \{A\}_{N-1} \tag{20}$$

ist.

Die Verträglichkeit von (13) und (17) mit der Addition weist man nach, indem man mit vollständiger Induktion zeigt, daß aus einer Beziehung $A + B = C$ stets die entsprechende für die Korrelationsterme, nämlich

$$\{A\}_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} + \{B\}_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = \{C\}_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$$

folgt.

Für die folgenden Rechnungen werden noch einige Eigenschaften der Korrelationssummanden gebraucht; sie sollen hier nicht hergeleitet werden, da die erste von ihnen leicht durch vollständige Induktion zu gewinnen ist, und die anderen eine Folge der ersten sind:

$$\int \mathrm{d}_{i_1} \{A\}_\mu{}^{i_1 \ldots i_\mu} = 0\,, \tag{21}$$

$$\int \mathrm{d}^{N-\mu} A = \int \mathrm{d}^{N-\mu} (\{A\}_0 + \ldots + \{A\}_\mu)\,, \tag{22}$$

$$\int \mathrm{d}^\nu \{A\}_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq N - \mu + 1\,. \tag{23}$$

Für ein homogenes System ist noch

$$\int \mathrm{d}x^N A = \int \mathrm{d}x^{N-1} A;$$

hiermit und mit (21) läßt sich zeigen:

$$[A]_\nu{}^{i_1 \ldots i_\nu} = 0 \quad \text{für } \nu \text{ ungerade.} \tag{24}$$

Wendet man die Darstellung (13) mit

$$G_N = \prod_{\nu=1}^{N} F_1(\nu), \quad F_1(\nu) = \int \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}\nu} F_N \tag{25}$$

auf die LIOUVILLE-Gleichung an, so erhält man im wesentlichen die BBGKY-Hierarchie; denn für jedes $i = 0, \ldots, N$ gilt zunächst:

$$\left\langle \frac{\partial F_N}{\partial t} \right\rangle_i^{\nu_1 \ldots \nu_i} + \langle K F_N \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} = \varepsilon \langle I F_N \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}. \tag{26}$$

Wegen der Integraleigenschaften (21), (22) enthalten $\langle \partial F_N / \partial t \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$ und $\langle K F_N \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$ nur Korrelationen bis zur Stufe i und $\langle I F_N \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i}$ bis zur Stufe $i+1$.

Für die Linearkombinationen

$$F_s(1, \ldots, s) = \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \sum_{\substack{\nu_1 \ldots \nu_i \in \\ \{1, \ldots s\}}}{}' \langle F_N \rangle_i{}^{\nu_1 \ldots \nu_i} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \neq \nu_1, \ldots, \nu_i}}^{s} F_1(\mu) \tag{27}$$

bekommt man die BBGKY-Hierarchie.

Diese Bemerkung soll nur den Zusammenhang der hier betrachteten Korrelationsaufspaltung mit der BBGKY-Hierarchie erläutern, nicht aber eine Methode zu ihrer Herleitung andeuten, die auf bekanntem Wege viel einfacher erfolgen kann. Der aufgezeigte Zusammenhang gibt jedoch an, in welcher Weise F_N auf Grund der Eindeutigkeit der Korrelationszerlegungen aus Lösungen der Hierarchiegleichungen aufzubauen ist.

Mit gleichen Überlegungen wie im Fall 1) erhält man bei der Zerlegung der LIOUVILLE-Gleichung nach (17) eine Hierarchie [5, 9] bezüglich der Ortskorrelationen.

Voranstehend wurde der Formalismus der Aufspaltung nach Korrelationen auf die LIOUVILLE-Gleichung angewendet. Wir wollen uns jetzt der direkten Lösung der Differentialgleichungen (9), (10), (11) bis zur zweiten Ordnung für die Darstellungen (13) mit

$$G_N = \prod_{\nu=1}^{N} F_1{}^0(\nu) \tag{28}$$

und (17) zuwenden (im folgenden als Fall 1) und Fall 2) bezeichnet): Es ist physikalisch sinnvoll, eine Anfangsbedingung nur für die Zeit $t=0$, d. h. alle $\tau_\nu = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots$, zu stellen. Zur Zeit $t=0$ soll gelten:

$$F_N = F_N{}^0 = \{F_N{}^0\}_0 \tag{29}$$

und für den Fall 1) der Korrelationsaufspaltung zusätzlich

$$\langle F_N{}^0 \rangle_0 = \prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; 0, 0, \ldots). \tag{30}$$

Wir fragen nach Lösungen, für welche für beliebige Werte der τ_ν jeweils gilt:

$$F_N{}^0 = \{F_N{}^0\}_0 . \tag{31}$$

Im Fall 1) soll außerdem die Form (30) für alle Zeiten bestehen. Es wird sich zeigen, daß F_N innerhalb der 2. Ordnung dann noch nicht eindeutig bestimmt ist. Der noch vorhandene Spielraum ist wahrscheinlich erforderlich, um die ab der nächsten Ordnung erstmalig nicht trivialerweise geltenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllen zu können [10]. Unter einer Verträglichkeitsbedingung verstehen wir eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \tau_i \, \partial \tau_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial \tau_j \, \partial \tau_i} . \tag{32}$$

Bei der nun folgenden Untersuchung der Differentialgleichungen (9), (10), (11) werden wir manchmal nur die Ergebnisse nennen, die Ausführungen sind dann im Anhang zu finden. Falls eine Funktion g nicht von den Variablen $\tau_0, \ldots, \tau_{i-1}$, sondern höchstens von den Variablen $\tau_i, \tau_{i+1}, \ldots$ abhängt, wollen wir das durch $g(\tau_i)$ ausdrücken.

Fall 1): Aus (9) folgt für $F_N{}^0$

$$F_N{}^0 = e^{-\tau_0 K} F_N{}^0(\tau_1) . \tag{33}$$

Da sich $F_N{}^0$ als $\prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; \tau_0)$ schreiben lassen soll, besagt (33)

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; \tau_0) &= e^{-\tau_0 K} \prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; 0, \tau_1, \ldots) \\ &= \prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; 0, \tau_1, \ldots), \end{aligned} \tag{34}$$

d. h.

$$F_N{}^0 = F_N{}^0(\tau_1) = \prod_{\nu=1}^{N} f^0(v_\nu; \tau_1) = \prod_{\nu=1}^{N} f^0(\nu). \tag{35}$$

Für $F_N{}^1$ erhält man aus (10):

$$F_N{}^1 = e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_1} + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{36}$$

In diesem Ausdruck werden zunächst die säkularen Terme und dann deren von 0 verschiedene Korrelationssummanden ermittelt. Man kommt zu folgendem Ergebnis:

Nur $\partial F_N{}^0/\partial \tau_1 = \langle \partial F_N{}^0/\partial \tau_1 \rangle_1$ ist säkular.

Deshalb ist zu fordern:

$$\partial F_N{}^0/\partial \tau_1 = 0 . \tag{37}$$

Man erhält damit für $F_N{}^1$:

$$F_N{}^1 = e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{38}$$

Für die 1-Teilchenfunktion F_1 ergibt sich aus (37) und (38):

$$\partial F_1{}^0/\partial \tau_1 = \partial f^0/\partial \tau_1 = 0 , \tag{39}$$

$$\partial F_1{}^1/\partial \tau_0 = 0 . \tag{40}$$

Aus (11) folgt für $F_N{}^2$:

$$F_N{}^2 = e^{-\tau_0 K} F_N{}^2(\tau_1) - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{\lambda K} \left\{ - \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_1} + I F_N{}^1 \right\} , \tag{41}$$

[9] J. HIGGINS, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Skrifter **2**, 1 [1962].

[10] D. FRANK, D. PFIRSCH u. S. PRIESS, Z. Naturforschg. **20 a**, 147 [1965].

also nach (36)

$$F_N^2 = e^{-\tau_0 K} F_N^2(\tau_1) - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} - e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I\, e^{-\lambda K} F_N^1(\tau_1) + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I \int_0^{\lambda} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0. \tag{42}$$

In diesem letzten Ausdruck für F_N^2 enthalten, wie im Anhang eingehend begründet ist, die folgenden Summanden säkulare Bestandteile:

$$-\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} - e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I \int_0^{\lambda} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0. \tag{43}$$

Hiervon sind nur die Korrelationsterme $\langle\ \rangle_1$ säkular und vom letzten Summanden der Bestandteil

$$\langle \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0 \rangle_1 .$$

Es treten nur in τ_0 lineare Säkularitäten auf. Auf Grund der Forderung nach Säkularitätenfreiheit erhält man deshalb:

$$-\left\langle \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} \right\rangle_1^{\nu} - \left\langle \frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\rangle_1^{\nu} + \langle I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N^0 \rangle_1^{\nu} = 0 . \tag{44}$$

Damit kein in τ_1 säkularer Term auftritt, muß gelten:

$$\langle \partial F_N^1(\tau_1)/\partial \tau_1 \rangle_1^{\nu} = 0 , \quad \text{also} \quad \partial F_1^1(\tau_1)/\partial \tau_1 = 0 \tag{45), (46}$$

und

$$\left\langle \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} \right\rangle_1^{\nu} = \langle I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N^0 \rangle_1^{\nu} . \tag{47}$$

Die letzte Gleichung (47) ist die LANDAU-Gleichung.

Für F_N^2 bekommt man somit folgenden Ausdruck:

$$F_N^2 = e^{-\tau_0 K} F_N^2(\tau_1) - \sum_{\nu=2}^{N} e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left\langle \frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\rangle_{\nu} + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I\, e^{-\lambda K} F_N^1(\tau_1)$$
$$- \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \langle I \int_{\lambda}^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0 \rangle_1 + \sum_{\nu=2}^{N} e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} \langle I \int_0^{\lambda} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0 \rangle_{\nu} \tag{48}$$

und für $\langle F_N^2 \rangle_1$ insbesondere:

$$\langle F_N^2 \rangle_1 = \langle F_N^2(\tau_1) \rangle_1 + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \langle I\, e^{-\lambda K} F_N^1(\tau_1) \rangle_1 - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \langle I \int_{\lambda}^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I\, F_N^0 \rangle_1. \tag{49}$$

Fall 2): Wegen $F_N^0 = [F_N^0]_0$ und damit $[K\, F_N^0]_0 = 0$ folgt aus (9): $F_N^0 = F_N^0(\tau_1)$. (50)

Wie im Fall 1) erhält man für F_N^1 aus (10):

$$F_N^1 = e^{-\tau_0 K} F_N^1(\tau_1) + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} \left(- \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_{\cdot}} + I\, F_N^0 \right). \tag{51}$$

In diesem Ausdruck enthält nur der Summand $-e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} (\partial F_N^0/\partial \tau_1)$ einen säkularen Bestandteil, und zwar den Korrelationsterm

$$\left[- e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_1} \right]_0 = - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \frac{\partial}{\partial \tau_1} F_N^0 .$$

Es ist deshalb zu fordern, daß gilt: $\partial F_N^0/\partial \tau_1 = 0$. (52)

Damit folgt
$$F_N^1 = e^{-\tau_0 K} F_N^1(\tau_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N^0. \tag{53}$$

Für F_N^2 hat man zunächst dieselbe Lösung (42) wie im Fall 1). Die Säkularitäten sind jedoch jetzt in anderen Korrelationstermen erfaßt: Von der Summe (43) ist der folgende Bestandteil säkular:
$$-\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left[\frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1}\right]_0 + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, [I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N^0]_1 . \tag{54}$$

Damit kein in τ_0 säkularer Term auftritt, muß deshalb gelten:
$$\left[\frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2}\right]_0 + \left[\frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1}\right]_0 = [I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N^0]_0. \tag{55}$$

Hieraus folgt mit der gleichen Überlegung wie im Fall 1): $\quad [\partial F_N^1(\tau_1)/\partial \tau_1]_0 = 0 \qquad (56)$

und
$$\frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} = [I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N^0]_0 . \tag{57}$$

Die Gl. (57) ist die Master-Gleichung von BROUT und PRIGOGINE. Für F_N^2 erhalten wir somit den folgenden Ausdruck:
$$\begin{aligned} F_N^2 = {} & e^{-\tau_0 K} F_N^2(\tau_1) - \sum_{\nu=2}^{N} e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left[\frac{\partial F_N^1(\tau_1)}{\partial \tau_1}\right]_\nu + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I\, e^{-\lambda K} F_N^1(\tau_1) \\ & - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, [I \int_{\lambda}^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N^0]_0 + \sum_{\nu=2}^{N} e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} [I \int_0^{\lambda} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N^0]_\nu \end{aligned} \tag{58}$$

und für $[F_N^2]_0$ insbesondere:
$$[F_N^2]_0 = [F_N^2(\tau_1)]_0 + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda [I\, e^{-\lambda K} F_N^1(\tau_1)]_0 - \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, [I \int_{\lambda}^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N^0]_0 . \tag{59}$$

In beiden Fällen bleiben die Funktionen $F_N^{\nu}(\tau_i)$ mit $i+\nu>2$ unbestimmt; diese Funktionen sowie $F_N^1(\tau_1)$ können im Rahmen der 2. Näherung gleich ihren Anfangswerten gesetzt werden.

4. Diskussion der *H*-Funktionen

Die Lösungen der LIOUVILLE-Gleichung, die wir im 3. Abschnitt gefunden haben, sollen jetzt dazu benutzt werden, die Beziehungen zwischen den *H*-Funktionen
$$H_N = \int \mathrm{d}^N F_N \ln F_N , \tag{60}$$
$$H_{\mathrm{L}} = \frac{1}{N} \int \mathrm{d}^N \langle F_N^0 \rangle_0 \ln \langle F_N^0 \rangle_0 , \tag{61}$$
$$H_{\mathrm{M}} = \int \mathrm{d}^N [F_N^0]_0 \ln [F_N^0]_0 \tag{62}$$
zu untersuchen. H_N ist die der LIOUVILLE-Gleichung zugeordnete *H*-Funktion, H_{L} ist die *H*-Funktion der LANDAU-Gleichung, und H_{M} die der Master-Gleichung. Von der LANDAU-Gleichung ist bekannt, daß sie ein *H*-Theorem besitzt
$$\mathrm{d}H_{\mathrm{L}}/\mathrm{d}t \leqq 0 , \tag{63}$$
wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\langle F_N^0 \rangle_0$ eine MAXWELL-Verteilung ist. Ebenso gilt auch
$$\mathrm{d}H_{\mathrm{M}}/\mathrm{d}t \leqq 0 . \tag{64}$$
Beide Aussagen werden im Anhang noch einmal nach einem einheitlichen Verfahren bewiesen.

(63) und (64) drücken beide ein irreversibles Verhalten aus, das darin besteht, daß unser Wissen von einem betrachteten *N*-Teilchen-System, wie es durch die Funktionen $\{F_N\}_0$ vermittelt wird, im Laufe der Zeit immer geringer wird. Aus der LIOUVILLE-Gleichung folgt auf der anderen Seite streng, daß H_N zeitlich konstant ist, daß also im Rahmen der Verteilungsfunktion F_N keine Informationen verlorengehen. Es besteht somit die Frage, wie das irreversible Verhalten auf der einen Seite zu dem reversiblen Verhalten auf der anderen Seite paßt.

Um hier Einsicht zu bekommen, schreiben wir uns die Funktion H_N im Rahmen der gemachten Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in ε auf:

$$H_N = \int \mathrm{d}^N F_N{}^0 \ln F_N{}^0 + \varepsilon \int \mathrm{d}^N F_N{}^1 (\ln F_N{}^0 + 1) \quad (65)$$
$$+ \varepsilon^2 \int \mathrm{d}^N F_N{}^2 (\ln F_N{}^0 + 1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int \mathrm{d}^N \frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0}.$$

Da $F_N{}^0 = \{F_N{}^0\}_0$ gilt, stellt der Term 0-ter Ordnung in ε gerade $N H_\mathrm{L}$ bzw. H_M dar. Für beide Funktionen gilt ein H-Theorem; damit H_N konstant sein kann, muß also die zeitliche Änderung von H_M bzw. H_L durch Glieder höherer Ordnung von H_N kompensiert werden. Das kann auf folgende Weise geschehen: von $F_N{}^0$ wissen wir, daß es von der Zeit nur über τ_2 und höhere Zeiten abhängt. Die Zeitableitung des ersten Terms stellt also einen Ausdruck zweiter Ordnung in ε dar. Die Terme höherer Ordnung können daher diesen Ausdruck nur dann kompensieren, wenn sie außer von τ_2 auch noch von τ_0 oder τ_1 abhängen, wobei dies auch für große Zeiten τ_0 gelten muß. Diese Zeitabhängigkeiten können nur über $F_N{}^1$ und $F_N{}^2$ gegeben sein. Im Anhang wird gezeigt, daß der Bestandteil erster Ordnung von H_N nur eine Funktion von $\tau_2, \tau_3, \ldots$ ist und daß der $F_N{}^2$ enthaltende Ausdruck für große τ_0 von τ_0 unabhängig wird [11], so daß notwendig $F_N{}^1$ auch für große Zeiten τ_0 mit seiner τ_0-Abhängigkeit beitragen muß. Das bedeutet, daß der Bogoljubovsche Synchronisationsvorgang in der N-Teilchen-Funktion nicht stattfindet. Im Anhang wird weiter gezeigt, daß mit den im vorigen Abschnitt gefundenen Lösungen der Liouville-Gleichung in der Tat $H_N = \mathrm{const}$ folgt; d. h. die zeitliche Abnahme des ersten Terms von H_N, also von H_M bzw. $N H_\mathrm{L}$, wird schließlich durch den Term

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \int \mathrm{d}^N \frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0}$$

kompensiert. Da $\langle F_N \rangle_0$ und $\langle F_N{}^1 \rangle_1$ bzw. $[F_N{}^1]_0$ nicht Funktionen von τ_0 sind, wird diese Kompensation nur durch höhere Korrelationsfunktionen, die in $F_N{}^1$ enthalten sind, bewirkt. Das entspricht somit genau dem in der Einleitung erwähnten Prigogineschen Kaskadenmechanismus.

Dieser Kaskadenmechanismus tritt auf, wenn man, wie in Abschn. 1 angegeben, hinreichend glatte Anfangsverteilungen vorliegen hat, denen virtuelle Gesamtheiten entsprechen, die zwar noch im Grenzfall $N \to \infty$ verschwindende Schwankungen makroskopischer Größen ergeben müssen, die aber nicht genau ein vorgegebenes System beschreiben. Das ist leicht folgendermaßen einzusehen:

Eine Verteilungsfunktion für ein bestimmtes vorgegebenes System ist durch

$$F_N = \quad (66)$$
$$\frac{1}{N!} \sum_{\text{Permutationen } (\nu_i)} \prod_{i=1}^{N} \delta(x_i - X_{\nu i}(t)) \cdot \delta(v_i - V_{\nu i}(t))$$

gegeben. Dabei sind $X_{\nu i}(t)$ und $V_{\nu i}(t)$ die Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen zur Zeit t. Aus einem solchen F_N folgt für die Einteilchen- und Zweiteilchenfunktion

$$F_1(x_1; v_1; t) = \sum_{\nu=1}^{N} \delta(x_1 - X_\nu(t))\, \delta(v_1 - V_\nu(t)),$$
$$F_2(x_1, x_2; v_1, v_2; t) = F_1(x_1; v_1; t)\, F_1(x_2; v_2; t)$$
$$- \delta(x_1 - x_2)\, \delta(v_1 - v_2) \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \delta(x_1 - X_\nu)\, \delta(v_1 - V_\nu); \quad (67)$$

d. h. die Einteilchenfunktion enthält genau dieselbe Information wie F_N, und die Korrelationsanteile in F_2 haben nur mit der Abzählung zu tun.

Hat man ein räumlich homogenes System vorliegen, dann kann man etwa durch beliebiges Verschieben eines vorgegebenen Systems eine virtuelle Gesamtheit erzeugen, für die dann

$$F_2 = \sum_{\nu} \delta(v_1 - V_\nu), \quad (68)$$
$$F_1 = \sum_{\nu \neq \mu} \delta(v_1 - V_\nu)\, \delta(v_2 - V_\mu)\, \delta(x_1 - x_2 - (X_\nu - X_\mu))$$

gilt. Hier enthält jetzt F_1 nicht mehr die volle Information, die in F_N steckt, dagegen besitzt sie F_2. Das bedeutet, daß jetzt die Korrelationsterme für das Wissen von dem betrachteten System wichtig geworden sind. Die Verschmierung der virtuellen Gesamtheit führt also dazu, daß Informationen in die Korrelationsfunktionen wandern, und das ist gerade die grundlegende Voraussetzung für den Prigogineschen Kaskadenmechanismus.

Damit kommen wir nun noch zu einem zweiten Bild für das irreversible Verhalten: In einer verschmierten Gesamtheit verhalten sich ja die Systeme alle etwas verschieden voneinander. In irgendwelchen, durch Integration aus F_N folgenden Verteilungsfunktionen erscheint daher das Verhalten der einzelnen Systeme der virtuellen Gesamtheit miteinander vermischt, so daß man auf Grund einer solchen laufenden Phasenmischung für diese Funktionen ein irreversibles Verhalten erhält.

[11] Wenn man $\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0$ und $\{F_N{}^1(\tau_1)\}_1$ gemäß den Ausführungen nach Gl. (59) und den Anfangsbedingungen (29) gleich Null setzt.

5. Anhang

A. Bestimmung der Säkularitäten in (42) für die Fälle 1) und 2):

Der Summand

$$-\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} = -\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left\langle \frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} \right\rangle_1 = -\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left[\frac{\partial F_N^0}{\partial \tau_2} \right]_0 \tag{69}$$

ist säkular von der Ordnung $O(\tau_0)$, da $F_N{}^0$ von τ_0 unbhängig ist. Von dem Term

$$-e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1}$$

sind die Korrelationsbestandteile $\langle\ \rangle_1$ und $[\ ]_0$ linear säkular, alle anderen regulär; denn es gilt:

$$e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} = e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left(\left\{ \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_0 + \left\{ \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_1 \right) + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left(\left\{ \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_2 + \dots \right), \tag{70}$$

also
$$e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} = \left\{ \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_0 + \left\{ \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_1 + e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \left(\left\{ \frac{\partial F_N{}^1(\tau_1)}{\partial \tau_1} \right\}_2 + \dots \right), \tag{71}$$

und in (71) ist der dritte Summand regulär, da in diesem τ_0 unter einer durch die endliche Reichweite von $\{\partial F_N{}^1(\tau_1)/\partial \tau_1\}_\nu$, $\nu \geqq 2$, gegebenen Schranke bleiben muß.

Der Term $e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{\lambda K} I \, e^{-\lambda K} F_N{}^1(\tau_1)$ aus (42) wird sich als regulär erweisen: Durch Umformungen ergibt sich nämlich:

$$e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{\lambda K} I \, e^{-\lambda K} F_N{}^1(\tau_1) = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-(\tau_0-\lambda) K} I \, e^{-\lambda K} F_N{}^1(\tau_1) = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-(\tau_0-\lambda) K} I \, e^{-\lambda K} (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \dots), \tag{72}$$

somit
$$e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{\lambda K} I \, e^{-\lambda K} F_N{}^1(\tau_1) = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} I (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-(\tau_0-\lambda) K} I \, e^{-\lambda K} (\{F_N{}^2(\tau_1)\}_2 + \dots). \tag{73}$$

Der zweite Summand von (73) ist regulär, da τ_0 durch die Reichweite von $\{F_N{}^1(\tau_1)\}_\nu$, $\nu \geqq 2$, beschränkt wird. Für den ersten Summanden erhalten wir:

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} I (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1) \tag{74}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{1} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} \{I (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1)\} + \sum_{\nu \geqq 2} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, \{I (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1)\}_\nu .$$

Dieser letzte Ausdruck ist wieder wegen der endlichen Reichweite von $\{I(\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1)\}_\nu$, $\nu \geqq 2$, regulär.

Der letzte Term von (42) enthält eine Säkularität; wir wollen diese abspalten:

Mit
$$B = \int_0^{\lambda} \mathrm{d}\lambda' \, e^{-\lambda' K} I \, F_N{}^0 \quad \text{ist} \tag{75}$$

$$e^{-\tau_0 K} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{\lambda K} I \, B = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda (\{I B\}_0 + \{I B\}_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-(\tau_0-\lambda) K} (\{I B\}_2 + \dots). \tag{76}$$

Der zweite Summand von (76) ist regulär; denn wegen

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-(\tau_0-\lambda) K} (\{I B\}_2 + \dots) = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} \left(\left\{I \int_0^{\tau_0-\lambda} \mathrm{d}\lambda' \, e^{-\lambda' K} I \, F_N{}^0\right\}_2 + \dots\right) \tag{77}$$

gelten für ihn die folgenden Abschätzungen für jedes Teilchenpaar i, j:

$$|x_{ij} - \lambda\, v_{ij}| < 1 \tag{78}$$

und

$$|x_{ij} - (\lambda + \lambda')\, v_{ij}| < 1\,. \tag{79}$$

Aus (78) folgt die Existenz eines Λ, so daß $\lambda \leqq \Lambda$ und aus (79) die eines Λ' mit $\lambda' \leqq \Lambda'$.

Da $\langle I B\rangle_0$ und $[I B]_1$ gleich Null sind, lautet der erste Summand der rechten Seite von (76)

im Fall 1):

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \langle I B\rangle_1 \tag{80}$$

und im Fall 2):

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda [I B]_0\,. \tag{81}$$

Wir wollen seine τ_0-Abhängigkeit für beide Fälle gleichzeitig an $\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \{I B\}_\nu$ diskutieren.

Können wir zeigen, daß von diesem Ausdruck die Ableitung nach τ_0 für $\tau_0 \to \infty$ beschränkt ist und nicht verschwindet, so liefert der von τ_0 unabhängige Bestandteil der Ableitung nach Integration über τ_0 gerade die lineare Säkularität.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \{I B\}_\nu = \{I \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N{}^0\}_\nu\,, \tag{82}$$

woraus mit den schon mehrfach durchgeführten, sich aus der endlichen Reichweite der Wechselwirkungskräfte ergebenden Abschätzungen folgt:

$$\lim_{\tau_0 \to \infty} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda \{I B\}_\nu = O(1)\,. \tag{83}$$

Da

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \{I \int_\lambda^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N{}^0\}_\nu$$

beschränkt ist, kann von $\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \{I B\}_\nu$ nur

$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \{I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N{}^0\}_\nu$ säkular sein.

Der säkulare Bestandteil des letzten Termes von (42) lautet also im Falle 1):

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, \langle I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N{}^0\rangle_1 \tag{84}$$

und im Fall 2):

$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, [I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\, e^{-\lambda' K} I F_N{}^0]_0\,. \tag{85}$$

B. Beweis der H-Theoreme für die Landau- und Master-Gleichung:

Wollen wir eine Aussage gleichzeitig für die H-Funktionen der Landau- bzw. Master-Gleichung machen, so schreiben wir statt H_{L} bzw. H_{M} einfach H.

Wir zeigen zunächst, daß bis zur zweiten Ordnung in ε die beiden folgenden Beziehungen gelten

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{N} \int \mathrm{d}^N \left(\frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0\right) \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0, \tag{86}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = -\int \mathrm{d}^N \left(\frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0\right) \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0, \tag{87}$$

und beweisen dann die positive Definitheit des Integrals

$$\int \mathrm{d}^N \left(\frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0\right) \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{88}$$

Aus $F_N{}^0 = \{F_N{}^0\}_0$ erhält man

$$N H_{\mathrm{L}} = \int \mathrm{d}^N F_N{}^0 \ln F_N{}^0 \tag{89}$$

und

$$H_{\mathrm{M}} = \int \mathrm{d}^N F_N{}^0 \ln F_N{}^0\,. \tag{90}$$

Da $F_N{}^0$ von τ_0 und τ_1 unabhängig ist, gilt bis zur zweiten Ordnung in ε:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \tau_2}\,. \tag{91}$$

Wegen

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} = \frac{\partial}{\partial \tau_2} \int \mathrm{d}^N F_N{}^0 = 0 \tag{92}$$

folgt damit

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{N} \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} \tag{93}$$

und

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2}\,. \tag{94}$$

Aus (93) erhalten wir die Beziehung (86), wenn wir berücksichtigen, daß sich in diesem Falle $F_N{}^0$ als ein Produkt $\prod_{\nu=1}^{N} f^0(\nu)$ von Einteilchenfunktionen darstellen läßt, und $F_N{}^0$ die Landau-Gleichung (47) erfüllt:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} &= \int \mathrm{d}^N \sum_{\nu=1}^{N} \ln f^0(\nu) \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \left\langle \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} \right\rangle_1^\nu \qquad (95)\\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \langle I \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0\rangle_1^\nu\,.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung machten wir von der folgenden Rechenregel Gebrauch:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \langle I g \rangle_1^{\nu} = - \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0)\, g \,, \quad (96)$$

wobei $g = g(x_1, \ldots, x_N; v_1, \ldots, v_N; \tau_0, \ldots)$.

Wir wollen diese Relation beweisen: Es ist

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \langle I g \rangle_1^{\nu} &= \int \mathrm{d}^N \ln f^0(\nu)\, I g \\
&= - \int \mathrm{d}^N g\, I \ln f^0(\nu) = - \int \mathrm{d}^N g \frac{1}{f^0(\nu)} I f^0(\nu) \\
&= - \int \mathrm{d}^N g \frac{1}{f^0(\nu)} \sum_{j(\neq \nu)} \frac{\partial U(x_{\nu j})}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\nu} f^0(\nu) \\
&= - \int \mathrm{d}^N g \frac{1}{F_N{}^0} \sum_{j(\neq \nu)} \frac{\partial U(x_{\nu j})}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_N{}^0
\end{aligned} \quad (97)$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \langle I g \rangle_1^{\nu} \\
&= - \int \mathrm{d}^N g \frac{1}{F_N{}^0} \sum_{\nu \neq j} \frac{\partial U(x_{\nu j})}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_N{}^0 \\
&= - \int \mathrm{d}^N g \frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0 .
\end{aligned} \quad (98)$$

Bei der Herleitung von (87) aus (94) wird die Eigenschaft $F_N{}^0 = [F_N{}^0]_0$ und die Master-Gleichung (57) benutzt:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 \frac{\partial F_N{}^0}{\partial \tau_2} \\
&= \int \mathrm{d}^N [\ln F_N{}^0]_0 \, [I \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0]_0 \\
&= \int \mathrm{d}^N [\ln F_{N0}\, I \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0]_0 \\
&= \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0\, I \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0 \\
&= - \int \mathrm{d}^N \left(\frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0\right) \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0 .
\end{aligned} \quad (99)$$

Wir beweisen jetzt die positive Definitheit von

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^N \left(\frac{1}{F_N{}^0} I F_N{}^0\right) \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0 \\
&= 4 \int \mathrm{d}^N g \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} g
\end{aligned} \quad (100)$$

mit $$g = I \sqrt{F_N{}^0} . \quad (101)$$

Um die Wirkung des Operators $\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K}$ auf g zu untersuchen, betrachten wir das FOURIER-Integral von g bezüglich seiner Ortsvariablen:

$$g = \int \mathrm{d}k^N \gamma(k; v; \tau_2, \ldots)\, e^{2\pi i k x}; \quad (102)$$

zur Vereinfachung haben wir hier k bzw. x bzw. v für $k_1, \ldots, k_N$ bzw. $x_1, \ldots, x_N$ bzw. $v_1, \ldots, v_N$ und $k x$ für $\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu x_\nu$ geschrieben. Auf Grund der Realität von g gilt:

$$\gamma(k; v; \ldots) = \gamma^*(-k; v; \ldots) . \quad (103)$$

Mit (102) folgt:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^N g \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} g &= \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}x^N \int \mathrm{d}k^N \gamma^*(k)\, e^{-2\pi i k x} \int \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} \int_0^\infty \mathrm{d}k'^N \gamma(k')\, e^{2\pi i k' x} \\
&= \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}x^N \int \mathrm{d}k^N \int \mathrm{d}k'^N \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \gamma^*(k)\, e^{2\pi i x(-k+k') - 2\pi i k' v} \gamma(k') \\
&= \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}k^N \int \mathrm{d}k'^N \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \delta(-k+k')\, \gamma^*(k)\, e^{-2\pi i k' v} \gamma(k') \\
&= \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}k^N \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, |\gamma(k)|^2 e^{-2\pi i k v} \\
&= \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}k^N |\gamma(k)|^2 \delta_-(k v) .
\end{aligned} \quad (104)$$

Wegen
$$\delta_-(k v) = \frac{1}{2} \delta(k v) + \frac{1}{2\pi i} P \frac{1}{k v} \quad (105)$$

erhält man aus der letzten Zeile von (104)

$$\int \mathrm{d}^N g \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} g = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}k^N |\gamma(k)|^2 \delta(k v) + \frac{1}{2\pi i} \int \mathrm{d}v^N \int \mathrm{d}k^N |\gamma(k)|^2 P \frac{1}{k v} . \quad (106)$$

Da der Hauptwert P eine ungerade und $|\gamma(k)|^2$ eine gerade Funktion von k ist, verschwindet der zweite Summand in (106); also ist $\int \mathrm{d}^N g \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} g$ positiv definit und nach (100) damit auch das Integral (88).

C. Beweis von $H_N = \mathrm{const}$ für die Fälle 1) und 2):

Bis zur zweiten Ordnung in ε ist

$$\frac{\mathrm{d}H_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_N}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial H_N}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_N}{\partial \tau_2}, \tag{107}$$

und bei Verwendung von (65) folgt hieraus:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_N}{\mathrm{d}t} &= \int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0} (F_N{}^0 \ln F_N{}^0) \\ &+ \varepsilon \int \mathrm{d}^N \Big(\frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^0 \ln F_N{}^0) + \frac{\partial}{\partial \tau_0} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) \Big) \\ &+ \varepsilon^2 \int \mathrm{d}^N \Big(\frac{\partial}{\partial \tau_2} (F_N{}^0 \ln F_N{}^0) + \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \Big(\frac{1}{2} \frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0} \Big) + \frac{\partial}{\partial \tau_0} (F_N{}^2 (1 + \ln F_N{}^0)) \Big).\end{aligned} \tag{108}$$

Der Term 0-ter Ordnung in ε verschwindet wegen $\partial F_N{}^0 / \partial \tau_0 = 0$.

Da $F_N{}^0$ auch von τ_1 unabhängig ist und $\quad \dfrac{\partial}{\partial \tau_0} \displaystyle\int \mathrm{d}^N F_N{}^1 = 0 \qquad (109)$

gilt, bleibt von dem Term erster Ordnung in ε zunächst nur der Bestandteil $\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0} (F_N{}^1 \ln F_N{}^0)$ übrig.

Im Fall 1) gilt für diesen:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \left\langle \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \right\rangle_1^{\nu} \tag{110}$$

und im Fall 2):

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \int \mathrm{d}v^N \ln F_N{}^0 \left[\frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \right]_0. \tag{111}$$

Bei Verwendung von (40) und (53) hat man deshalb in beiden Fällen

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = 0. \tag{112}$$

Der Nachweis, daß auch der Term zweiter Ordnung in ε aus (108) verschwindet, ist etwas mühsamer. Wir diskutieren seine Summanden in der Reihenfolge, wie sie in (108) stehen. Dabei wird sich zeigen, daß der zweite Summand gleich Null ist, aber der erste, dritte und vierte von Null verschieden sind, und erst ihre Summe Null ergibt.

Nach (95) und (99) läßt sich $\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_2} (F_N{}^0 \ln F_N{}^0)$ im Falle 1) wie 2) bei Berücksichtigung von

$\dfrac{\partial}{\partial \tau_2} \displaystyle\int \mathrm{d}^N F_N{}^0 = 0$ auf die folgende Form bringen: (113)

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_2} (F_N{}^0 \ln F_N{}^0) = - \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0) \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{114}$$

Für den Summanden $\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)$ gilt:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) = \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_1}, \tag{115}$$

weshalb im Falle 1) folgt:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) = \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \left\langle \frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_1} \right\rangle_1^{\nu} \tag{116}$$

und im Falle 2):

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) = \int \mathrm{d}v^N \ln F_N{}^0 \left[\frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_1} \right]_0. \tag{117}$$

Mit (45) und (56) erhält man damit für beide Fälle:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_1} (F_N{}^1 (1 + \ln F_N{}^0)) = 0. \tag{118}$$

Für den Summanden $\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{1}{2}\,\frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0}\right)$ ergibt sich nach (38) und (51):

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{1}{2}\,\frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0}\right) &= \int \mathrm{d}^N \frac{F_N{}^1}{F_N{}^0}\,\frac{\partial F_N{}^1}{\partial \tau_0} \\
&= \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0) \cdot (-K\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + e^{-\tau_0 K} I\, F_N{}^0) \\
&= \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(F_N{}^1(\tau_1) + \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{-(\lambda-\tau_0) K} I\, F_N{}^0) \cdot (-F_N{}^1(\tau_1) + I\, F_N{}^0) \\
&= -\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\, F_N{}^1(\tau_1)\, K\, F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\, F_N{}^1(\tau_1)\, I\, F_N{}^0 \\
&\quad - \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I\, F_N{}^0)\, K\, F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0) \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{\lambda K} I\, F_N{}^0 .
\end{aligned} \tag{119}$$

Es ist
$$\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\, F_N{}^1(\tau_1)\, K\, F_N{}^1(\tau_1) = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\, K (F_N{}^1(\tau_1))^2 = 0 . \tag{120}$$

Bei Verwendung der Beziehung
$$\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, K\, e^{-\lambda K} g = -e^{-\tau_0 K} g + g \tag{121}$$

mit $g = g(x_1, \ldots, x_n;\, v_1, \ldots, v_n;\, \tau_0, \tau_1, \ldots)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
-\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, I\, F_N{}^0)\, K\, F_N{}^1(\tau_1) &= -\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, (I\, F_N{}^0)\, K\, e^{-\lambda K} F_N{}^1(\tau_1) \\
&= \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0)\, (e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) - F_N{}^1(\tau_1)) \\
&= \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) - \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0)\, F_N{}^1(\tau_1) .
\end{aligned} \tag{122}$$

Mit (120) und (122) folgt aus (119):

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{1}{2}\,\frac{(F_N{}^1)^2}{F_N{}^0}\right) = \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0) \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0 . \tag{123}$$

Den Summanden
$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0}\,(F_N{}^2 (1 + \ln F_N{}^0)) = \int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 \tag{124}$$
untersuchen wir für beide Fälle getrennt.

Im Falle 1) gilt:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu) \left\langle \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \right\rangle_1^\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu)\, \frac{\partial}{\partial \tau_0} \langle F_N{}^2 \rangle_1{}^\nu . \tag{125}$$

Aus (49) folgt
$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \langle F_N{}^2 \rangle_1{}^\nu = \langle I\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) \rangle_1{}^\nu - \langle I \int_\infty^{\tau_0} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0 \rangle_1{}^\nu , \tag{126}$$
damit für (125):

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \sum_{\nu=1}^{N} \int \mathrm{d}\nu \ln f^0(\nu)\, (\langle I\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) \rangle_1{}^\nu - \langle I \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0 \rangle_1{}^\nu) \tag{127}$$

und bei Verwendung der Regel (96) weiter:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = -\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0}\,(I\, F_N{}^0) \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0 . \tag{128}$$

Im Fall 2) ist:
$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \int \mathrm{d}v^N \ln F_N{}^0 \left[\frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0}\right]_0 = \int \mathrm{d}v^N \ln F_N{}^0\, \frac{\partial}{\partial \tau_0}\, [F_N{}^2]_0 . \tag{129}$$

Aus (59) erhält man
$$\frac{\partial}{\partial \tau_0}\, [F_N{}^2]_0 = [I\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1)]_0 - [I \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I\, F_N{}^0]_0 , \tag{130}$$

damit für (129):

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = \int \mathrm{d}v^N \ln F_N{}^0 \left([I\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1)]_0 - [I \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0]_0 \right)$$
$$= \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 I\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) - \int \mathrm{d}^N \ln F_N{}^0 I \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0 \tag{131}$$

und unter Benutzung der Eigenschaft, daß I bezüglich der Integration $\int \mathrm{d}v^N$ ein antihermitescher Operator ist, folgt hieraus:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial F_N{}^2}{\partial \tau_0} \ln F_N{}^0 = -\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0) \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{132}$$

An (128) und (132) erkennt man, daß in beiden Fällen gilt:

$$\int \mathrm{d}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0} (F_N{}^2(1+\ln F_N{}^0)) = -\int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) + \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0) \int_{\tau_0}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, e^{-\lambda K} I F_N{}^0. \tag{133}$$

Aus (114), (123) und (133) folgt, daß die Summe des ersten, dritten und vierten Summanden des Termes zweiter Ordnung in ε aus (108) tatsächlich Null ergibt. Damit ist der Beweis für $\mathrm{d}H_N/\mathrm{d}t = 0$ beendet.

Wählt man, wie in der Fußnote [11] des Abschnittes 4 angegeben, $\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 = \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1 = 0$, (134)

so fällt für $\tau_0 \to \infty$ in (133) der erste Summand fort; es gilt dann nämlich:

$$\lim_{\tau_0 \to \infty} \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} F_N{}^1(\tau_1) = \lim_{\tau_0 \to \infty} \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0)\, e^{-\tau_0 K} (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \ldots)$$
$$= \lim_{\tau_0 \to \infty} \int \mathrm{d}^N \frac{1}{F_N{}^0} (I F_N{}^0) (\{F_N{}^1(\tau_1)\}_0 + \{F_N{}^1(\tau_1)\}_1) = 0. \tag{135}$$

Der zweite Summand in (133) verschwindet stets für $\tau_0 \to \infty$.